

微专题：解析几何中斜率之积为定值（ $k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$ ）的问题探究

【教学重点】掌握椭圆中 $k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$ 的形成的路径探寻及成果运用理性判断

【教学难点】运算的设计和化简

活动一： $k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$ 形成的路径探寻

1. 若 AB 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的不过原点的弦，点 P 是弦 AB 的中点，且直线 OP, AB

的斜率都存在，求 $K_{AB} \cdot K_{PO}$.

【解析】：设点 $P(x_0, y_0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

则有 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1(1)$; $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1(2)$; (代点作

差)

将①式减②式得, $b^2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + a^2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$,

$x_1 + x_2 = 2x_0, y_1 + y_2 = 2y_0$,

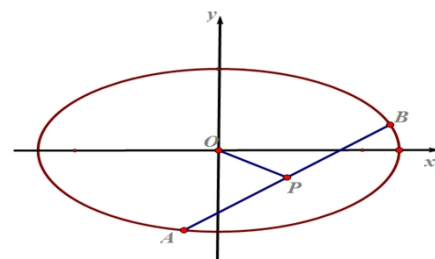
所以 $2x_0b^2(x_1 - x_2) + 2y_0a^2(y_1 - y_2) = 0$ 所以 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y_0}{x_0} = -\frac{b^2}{a^2}$,

即 $K_{AB} \cdot K_{PO} = -\frac{b^2}{a^2}$.

【结论形成总结】

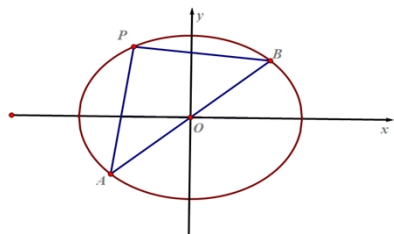
【结论 1】 若 AB 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的非直径的弦，点 P 是弦 AB 的中点，且

直线 OP, AB 的斜率都存在，则 $K_{AB} \cdot K_{PO} = -\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$.



2. 已知 AB 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上过原点的弦，点 P 是椭圆异于 A, B 的任意一点，

若直线 PA, PB 的斜率都存在，记直线 PA, PB 的斜率分别为 k_1, k_2 . 求 $k_1 \cdot k_2$ 的值。



【解法 1】：设 $P(x_0, y_0)$, $A(x_1, y_1)$ 又因为 A, B 是关于原点对称，

所以点 B 的坐标为 $B(-x_1, -y_1)$ ，所以 $k_1 \cdot k_2 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{y_0 + y_1}{x_0 + x_1} = \frac{y_0^2 - y_1^2}{x_0^2 - x_1^2}$.

又因为点 $P(x_0, y_0)$, $A(x_1, y_1)$ 在椭圆上，所以有

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1(1); \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1(2);$$

两式相减得，

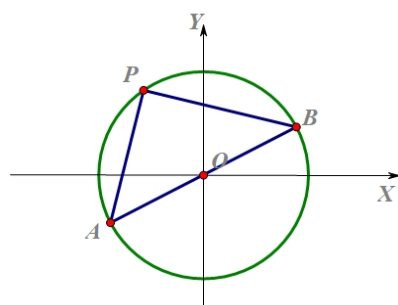
$$\frac{y_0^2 - y_1^2}{x_0^2 - x_1^2} = -\frac{b^2}{a^2}, \text{ 所以 } k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

【方法小结】本解法从设点入手，利用“点在曲线上”代点作差使用“点差法”。

【解法 2】椭圆圆化：由圆的结论类比到椭圆中。

过圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 上异于直径两端点的任意一点与一条直径的两个端点连线，则两条连线的斜率之积为定值

$$K_{PA} \cdot K_{PB} = -1$$



类比上述圆的结论通过伸缩变换椭圆圆化

$$\text{令 } \frac{x}{a} = x'; \frac{y}{b} = y' \quad \text{则有} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \Rightarrow (x')^2 + (y')^2 = 1$$

$$P(x_0, y_0) \Rightarrow P'\left(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}\right); \quad \text{点 P, A, B 为椭圆上点}$$

$$A(x_1, y_1) \Rightarrow A'\left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{b}\right) \quad \text{点 } p', A', B' \text{ 为新圆上点}$$

$$B(-x_1, -y_1) \Rightarrow B'\left(-\frac{x_1}{a}, -\frac{y_1}{b}\right) \quad \text{由圆上的 } k_{P'A'} \cdot k_{P'B'} = -1 \text{ 的关系过渡到 PA, PB 上}$$

$$k_{P'A'} \cdot k_{P'B'} = \frac{\left(\frac{y_0}{b}\right)^2 - \left(\frac{y_1}{b}\right)^2}{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2} = -1 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = \frac{(y_0)^2 - (y_1)^2}{(x_0)^2 - (x_1)^2} = -\frac{b^2}{a^2}$$

【方法小结】解法 2 运用类比联想的方法；由圆的结论过渡到椭圆，学生易于理解，但通过伸缩变换将椭圆圆化的过程对于学生的能力具有一定的要求。这也正是我们要加强训练的地方。

【结论形成总结】

【结论 2】 已知 AB 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的中心弦，点 P 是椭圆上任意一点，

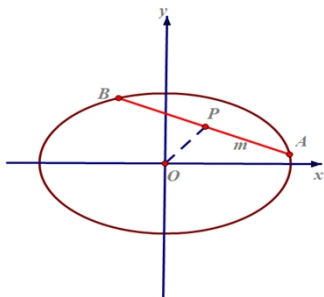
若直线 PA, PB 的斜率都存在，则 $K_{PA} \cdot K_{PB} = -\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$ 。

活动二： $k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$ 结论的应用

【例 1】

(1) 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，直线 m 与椭圆 C 相交于 A, B 两点，且 AB 的中点为 P(1,1)，

则直线 m 的方程为_____



【解析】 本题具有弦中点的特征所以应用结论 1 $K_{AB} \cdot K_{PO} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{2}$

因为 $P(1,1)$ 易求 $K_{PO} = 1$ 的, 所以 $K_{AB} = -\frac{1}{2}$

所以直线 m 的方程为: $x+2y-3=0$

(2) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, $B,$

C 分别为椭圆的上、下顶点, 直线 BF_2 与椭圆的另一交点为 D . 若 $\cos \angle F_1BF_2 = \frac{1}{2}$,

则直线 CD 的斜率为_____.

【解析】观察图形易发现 BC 具有中心弦的特征选用结论 2

因为 $\cos \angle F_1BF_2 = \frac{1}{2}$ 所以 $\angle F_1BF_2 = 60^\circ$

所以 $\angle OBF_2 = 30^\circ$; 在 $Rt_{\triangle BOF_2}$ 中易知 $BF_2 = 2$

$$OB = \sqrt{3} = b \quad \angle BF_2O = 60^\circ$$

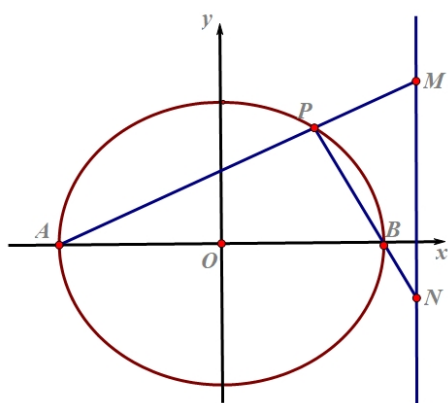
所以直线 BD 的倾斜角为 120° 所以直线 BD 的斜率为 $K_{BD} = -\sqrt{3}$;

由结论可知 $K_{BD} \cdot K_{CD} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{3}{4}$ 所以 $K_{CD} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

【方法小结】通过两道小题强化结论的应用; 并让学生能够通过图形自主发现中点弦, 中心弦的特征, 从而合理巧妙的应用结论。

【例 2】如图, 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 中, A, B 分别为椭圆的左右顶点, l_2 是椭圆的右准线,

P 是椭圆上的动点, 直线 AP, BP 分别交 l_2 于 M, N , 求线段 MN 的最小值。



【解析】【设k法】

设直线 AP 的斜率为 K ($k>0$), 则直线 AP 的方程为: $y=k(x+2)$;

又 MN 的方程为 $x=4$. 易求 $M(4,6K)$;

$$\begin{cases} y = k(x+2) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow (3+4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0 \text{ 又 } A(-2,0); \text{ 设 } P(x_0, y_0)$$

$$(-2) \cdot x_0 = \frac{16k^2 - 12}{3+4k^2} \Rightarrow x_0 = \frac{6-8k^2}{3+4k^2} \text{ 易得 } y_0 = \frac{12k}{3+4k^2} \therefore P\left(\frac{6-8k^2}{3+4k^2}, \frac{12k}{3+4k^2}\right)$$

又点 B (2,0); 所以 $K_{PB} = -\frac{3}{4k}$; 所以直线 PB 的方程为: $y = -\frac{3}{4k}(x-2)$; 令 $x=4$ 得

$$N\left(4, -\frac{3}{2k}\right); \text{ 所以 } MN = \left|6k + \frac{3}{2k}\right| \geq 6 \text{ (当且仅当 } k = \frac{1}{2} \text{ 时等号成立)}$$

解法二：【利用中心弦结论 $K_{PA} \cdot K_{PB} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{3}{4}$ 】

设直线 AP 的方程为: $y=k(x+2)$; 因为 $K_{PA} \cdot K_{PB} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow K_{PB} = -\frac{3}{4k}$

所以直线 PB 的方程为: $y = -\frac{3}{4k}(x-2)$; 易得 $M(4,6K)$; $N(4, -\frac{3}{2k})$

$$\text{所以 } MN = \left|6k + \frac{3}{2k}\right| \geq 6 \text{ (当且仅当 } k = \frac{1}{2} \text{ 时等号成立)}$$

解法三：【设点法】

设 $M(4,m)(m>0); N(4,n)(n<0); A(-2,0), B(2,0)$ $K_{PA} = \frac{m}{6}; K_{PB} = \frac{n}{2}$

$$\therefore K_{PA} \cdot K_{PB} = \frac{mn}{12} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow m(-n) = 9$$

$$MN = |m + (-n)| \geq 2\sqrt{m(-n)} = 6 \text{ (当且仅当 } m = (-n) = 3 \text{ 时等号成立)}$$

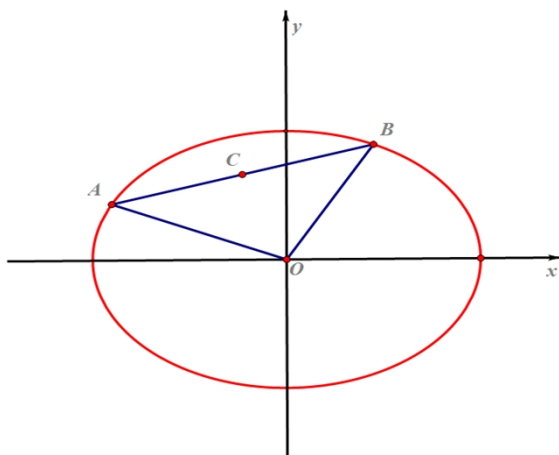
【点评】三种方法两个角度：显然从设点和设 K 的角度处理问题结合中心弦的结论能够快速计算找到解题的突破口。

【拓展延伸】

在平面直角坐标系 xOy 中，设 A, B 为椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上异于顶点的两点。

(1) 若 OA, OB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$ ，求证： $OA^2 + OB^2$ 为定值；

(2) 若 OA, OB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$ ，求证：线段 AB 的中点 C 在某个定椭圆上。



【解析】第一小问设 $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$ ； $K_{OA} \cdot K_{OB} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -\frac{1}{2}$ ；

$\therefore 2y_1 y_2 = -x_1 x_2 \Rightarrow 4y_1^2 y_2^2 = x_1^2 x_2^2$ ；又因为点 A, B 在椭圆上

$\therefore x_1^2 = 2 - 2y_1^2$ ； $x_2^2 = 2 - 2y_2^2$ 代入上式得：

$$4y_1^2 y_2^2 = x_1^2 x_2^2 = (2 - 2y_1^2) \cdot (2 - 2y_2^2) \Rightarrow y_1^2 + y_2^2 = 1$$

$$\therefore OA^2 + OB^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = (2 - 2y_1^2) + y_1^2 + (2 - 2y_2^2) + y_2^2 = 4 - (y_1^2 + y_2^2) = 3$$

(2) 设 $C(x_0, y_0)$ ；因为 C 为 AB 中点

$$\begin{cases} 2x_0 = x_1 + x_2 \\ 2y_0 = y_1 + y_2 \end{cases} \text{平方} \Rightarrow \begin{cases} 4x_0^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 & (1) \\ 4y_0^2 = y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2 & (2) \end{cases} \text{因为 } K_{OA} \cdot K_{OB} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -\frac{1}{2}；$$

$\therefore 2y_1 y_2 + x_1 x_2 = 0 \Rightarrow 4y_1 y_2 + 2x_1 x_2 = 0$ ；所以 (1) + (2) $\times 2$ 可得

$$4x_0^2 + 8y_0^2 = x_1^2 + 2y_1^2 + x_2^2 + 2y_2^2 = 4 \Rightarrow x_0^2 + 2y_0^2 = 1 \Rightarrow \frac{x_0^2}{1} + \frac{y_0^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

【探究形成结论】

在平面直角坐标系 xOy 中，设 A, B 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上异于顶点的两点。

(1) 若 OA, OB 的斜率之积为 $K_{OA} \cdot K_{OB} = -\frac{b^2}{a^2}$ ；则 $OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2$ ；

【解析】设 $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$ ； $K_{OA} \cdot K_{OB} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -\frac{b^2}{a^2}$ ；

$\therefore a^2 y_1 y_2 = -b^2 x_1 x_2 \Rightarrow a^4 y_1^2 y_2^2 = b^4 x_1^2 x_2^2$ ；又因为点 A, B 在椭圆上

$\therefore b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2$ ； $b^2 x_2^2 + a^2 y_2^2 = a^2 b^2$ 移项得：

$\therefore -a^2 y_1^2 = b^2 x_1^2 - a^2 b^2 (1)$ ； $-a^2 y_2^2 = b^2 x_2^2 - a^2 b^2 (2)$ 由 (1) $\times$ (2) 得：

$$a^4 y_1^2 y_2^2 = b^4 (x_1^2 - a^2) \cdot (x_2^2 - a^2) = b^4 x_1^2 x_2^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = a^2$$

由 (1) + (2) 得 $\therefore -a^2 (y_1^2 + y_2^2) = b^2 (x_1^2 + x_2^2) - 2a^2 b^2 = -a^2 b^2 \Rightarrow y_1^2 + y_2^2 = b^2$

$$\therefore OA^2 + OB^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = a^2 + b^2$$

(2) 若 OA, OB 的斜率之积为 $-\frac{b^2}{a^2}$ ，求证：线段 AB 的中点 C 在某个定椭圆上。

设 $C(x_0, y_0)$ ；因为 C 为 AB 中点

$$\begin{cases} 2x_0 = x_1 + x_2 \\ 2y_0 = y_1 + y_2 \end{cases} \text{平方} \Rightarrow \begin{cases} 4x_0^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 (1) \\ 4y_0^2 = y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2 (2) \end{cases}$$

$$\text{因为 } K_{OA} \cdot K_{OB} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -\frac{b^2}{a^2}；$$

$\therefore a^2 y_1 y_2 + b^2 x_1 x_2 = 0$ ；所以 (1) $\times b^2 + (2) \times a^2$ 可得

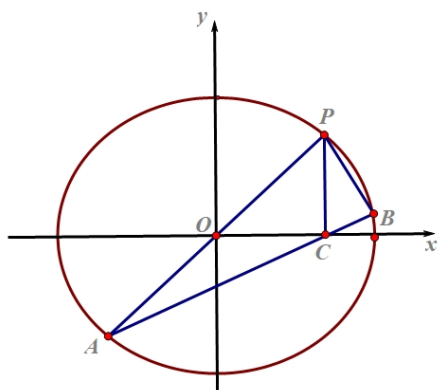
$$\begin{cases} 4b^2 x_0^2 = b^2 x_1^2 + 2b^2 x_1 x_2 + b^2 x_2^2 (1) \\ 4a^2 y_0^2 = a^2 y_1^2 + 2a^2 y_1 y_2 + a^2 y_2^2 (2) \end{cases} \Rightarrow 4b^2 x_0^2 + 4a^2 y_0^2 = 2a^2 b^2$$

$$\therefore AB \text{ 的中点轨迹方程为: } \frac{x_0^2}{\frac{a^2}{2}} + \frac{y_0^2}{\frac{b^2}{2}} = 1$$

【小结】伴生结论: $x_1^2 + x_2^2 = a^2$; $y_1^2 + y_2^2 = b^2$

【巩固练习】

1. (2011 江苏卷 18) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, M 、 N 分别是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的顶点, 过坐标原点的直线交椭圆于 P 、 A 两点, 其中 P 在第一象限, 过 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 C , 连接 AC , 并延长交椭圆于点 B , 设直线 PA 的斜率为 k , 对任意 $k > 0$, 证明 $PA \perp PB$



法一: 运用点差法求解; 主要应用上述结论推导过程中设点作差的思想方法。

由题意设 $P(x_0, y_0)$, $A(-x_0, -y_0)$, $B(x_1, y_1)$, 则 $C(x_0, 0)$,

$\because A$ 、 C 、 B 三点共线, $\therefore \frac{y_1}{x_1 - x_0} = \frac{y_0}{2x_0} = \frac{y_1 + y_0}{x_1 + x_0}$, 又因为点 P 、 B 在椭圆上,

$$\therefore \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} = 1, \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{2} = 1, \text{ 两式相减得: } k_{PB} = -\frac{x_0 + x_1}{2(y_0 + y_1)}$$

$$\therefore k_{PA} k_{PB} = \frac{y_0}{x_0} \left[-\frac{x_0 + x_1}{2(y_0 + y_1)} \right] = -\frac{(y_1 + y_0)(x_0 + x_1)}{(x_1 + x_0)(y_0 + y_1)} = -1 \therefore PA \perp PB$$

法二: 注意有中心弦的特征所以尝试运用结论 1 的方法

由题意设 $P(x_0, y_0)$, $A(-x_0, -y_0)$, $B(x_1, y_1)$, 则 $C(x_0, 0)$, $K_{PA} = \frac{y_0}{x_0}$;

$$K_{AB} = K_{AC} = \frac{y_0}{2x_0} = \frac{1}{2} K_{PA}; \text{ 由结论 1: } K_{AB} \cdot K_{PB} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{2}; \text{ 用 } \frac{1}{2} K_{PA} \text{ 代换 } K_{AB}$$

$$\text{则 } K_{AB} \bullet K_{PB} = \frac{1}{2} K_{PA} \bullet K_{PB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow K_{PA} \bullet K_{PB} = -1 \therefore PA \perp PB$$

法三：因为 AB 不是中心弦，通过构造弦 AB 中点尝试运用结论 2 的方法

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), A, B$ 中点 $N(x_0, y_0)$, 则 $P(-x_1, -y_1), C(-x_1, 0)$,

$\therefore A, C, B$ 三点共线, $\therefore \frac{y_2}{x_2 + x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1}{2x_1} = k_{AB}$, 又因为点 A, B 在椭圆上,

$$\therefore \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{2} = 1, \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{2} = 1, \text{两式相减得: } \frac{y_0}{x_0} = -\frac{1}{2k_{AB}},$$

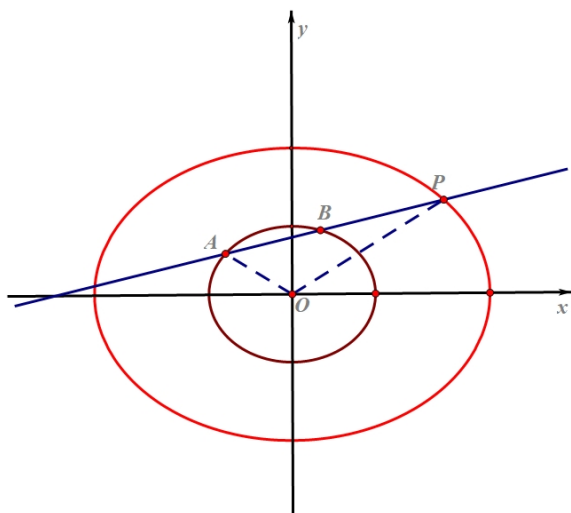
$$\therefore k_{ON} k_{PA} = \frac{y_0}{x_0} \frac{y_1}{x_1} = -\frac{1}{2k_{AB}} \times 2k_{AB} = -1, \therefore ON \parallel PB, \therefore PA \perp PB$$

【点评】通过一道例题将上述结论的探究方法（设点法，点差法等）以及两个结论都到了运用。起到了典例示范的作用，并通过三种方法的对比训练学生发现中心弦特征；挖掘弦中点的方法技巧；真正起到学以致用作用。

2. 如图，已知椭圆 $E_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 椭圆 $E_2: \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1 (a > b > 0)$,

椭圆 E_1 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, P 在椭圆 E_2 上, 过点 P 的直线 L 交椭圆 E_1 于 A, B 两点, 且

$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, 若直线 OP, OA 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$, 求实数 λ 的值。



【解析】方法一：由题意得 $x_0^2 + 2y_0^2 = 8b^2, x_1^2 + 2y_1^2 = 2b^2, x_2^2 + 2y_2^2 = 2b^2$,

$$\frac{y_0}{x_0} \cdot \frac{y_1}{x_1} = -\frac{1}{2}, \text{ 即 } x_0x_1 + 2y_0y_1 = 0,$$

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}, \text{ 则 } (x_0 - x_1, y_0 - y_1) = \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1), \text{ 解得 } \begin{cases} x_2 = \frac{x_0 + (\lambda - 1)x_1}{\lambda} \\ y_2 = \frac{y_0 + (\lambda - 1)y_1}{\lambda} \end{cases}$$

$$\text{所以 } \left(\frac{x_0 + (\lambda - 1)x_1}{\lambda}\right)^2 + 2\left(\frac{y_0 + (\lambda - 1)y_1}{\lambda}\right)^2 = 2b^2$$

$$\text{则 } x_0^2 + 2(\lambda - 1)x_0x_1 + (\lambda - 1)^2x_1^2 + 2y_0^2 + 4(\lambda - 1)y_0y_1 + 2(\lambda - 1)^2y_1^2 = 2\lambda^2b^2$$

$$(x_0^2 + 2y_0^2) + 2(\lambda - 1)(x_0x_1 + 2y_0y_1) + (\lambda - 1)^2(x_1^2 + 2y_1^2) = 2\lambda^2b^2$$

$$\text{所以 } 8b^2 + (\lambda - 1)^2 \cdot 2b^2 = 2\lambda^2b^2, \text{ 即 } 4 + (\lambda - 1)^2 = \lambda^2, \text{ 所以 } \lambda = \frac{5}{2}$$

方法二：不妨设点 P 在第一象限，设直线 $OP: y = kx (k > 0)$,

$$\text{代入椭圆 } E_2: x^2 + 2y^2 = 8b^2, \text{ 解得 } x_0 = \frac{2\sqrt{2}b}{\sqrt{1+2k^2}}, \text{ 则 } y_0 = \frac{2\sqrt{2}bk}{\sqrt{1+2k^2}},$$

$$\text{直线 } OP, OA \text{ 的斜率之积为 } -\frac{1}{2}, \text{ 则直线 } OA: y = -\frac{1}{2k}x,$$

$$\text{代入椭圆 } E_1: x^2 + 2y^2 = 2b^2, \text{ 解得 } x_1 = -\frac{2bk}{\sqrt{1+2k^2}}, \text{ 则 } y_1 = \frac{b}{\sqrt{1+2k^2}}$$

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}, \text{ 则 } (x_0 - x_1, y_0 - y_1) = \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1), \text{ 解得 } \begin{cases} x_2 = \frac{x_0 + (\lambda - 1)x_1}{\lambda} \\ y_2 = \frac{y_0 + (\lambda - 1)y_1}{\lambda} \end{cases},$$

$$\text{所以 } \left(\frac{x_0 + (\lambda - 1)x_1}{\lambda}\right)^2 + 2\left(\frac{y_0 + (\lambda - 1)y_1}{\lambda}\right)^2 = 2b^2$$

$$\text{则 } x_0^2 + 2(\lambda - 1)x_0x_1 + (\lambda - 1)^2x_1^2 + 2y_0^2 + 4(\lambda - 1)y_0y_1 + 2(\lambda - 1)^2y_1^2 = 2\lambda^2b^2$$

$$(x_0^2 + 2y_0^2) + 2(\lambda - 1)(x_0x_1 + 2y_0y_1) + (\lambda - 1)^2(x_1^2 + 2y_1^2) = 2\lambda^2b^2$$

所以

$$8b^2 + 2(\lambda - 1)\left(\frac{2\sqrt{2}b}{\sqrt{1 + 2k^2}} \cdot \left(-\frac{2bk}{\sqrt{1 + 2k^2}}\right) + 2\frac{2\sqrt{2}bk}{\sqrt{1 + 2k^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{1 + 2k^2}}\right) + (\lambda - 1)^2 \cdot 2b^2 = 2\lambda^2b^2,$$

$$\text{即 } 8b^2 + (\lambda - 1)^2 \cdot 2b^2 = 2\lambda^2b^2, \text{ 即 } 4 + (\lambda - 1)^2 = \lambda^2, \text{ 所以 } \lambda = \frac{5}{2}$$

【课时小结】通过本节课学习掌握以下四个方面

1. 解析几何中设点法，点差法，对称点，点在曲线上等对点的问题处理技巧。

$$2. \text{ 中心弦的特征: } K_{PA} \bullet K_{PB} = -\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1;$$

$$3. \text{ 中点弦的特征: } K_{AB} \bullet K_{PO} = -\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1;$$

4. 半弦的性质特征:

$$\text{若 } OA, OB \text{ 的斜率之积为 } K_{OA} \bullet K_{OB} = -\frac{b^2}{a^2};$$

$$(1) x_1^2 + x_2^2 = a^2; y_1^2 + y_2^2 = b^2$$

$$(2) OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2;$$

$$(3) AB \text{ 的中点轨迹方程为: } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$